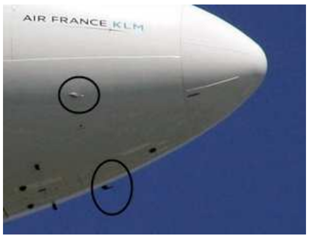
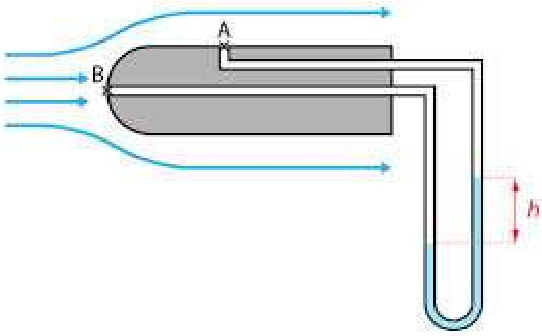
TD 4 mécanique des fluides

I. Tube de pitot



Le tube de Pitot est une sonde très rustique mais essentielle à la sécurité de tous les avions puisqu'elle donne une mesure de la vitesse. Les tubes de Pitot sont dégivrés régulièrement et une défaillance de l'un deux peut causer une chute de l'appareil.

Le tube Pitot est placé dans le sens du flux à mesurer. L'ouverture, un orifice de quelques millimètres est orientée vers l'amont. La mesure de h (différence de hauteur d'un fluide incompressible de masse volumique ρ_l placé dans le tube en U) permet la mesure de la vitesse V_0 de l'avion. On note ρ la masse volumique de l'air autour du tube.

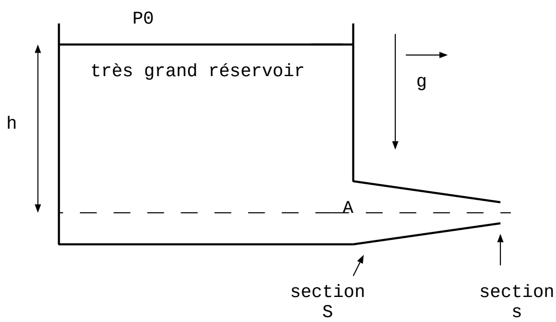


1. Justifier que la vitesse du fluide en A est peu différente de la vitesse V_0 de l'avion.

2. Que pensez-vous de la vitesse en A? Déterminer la relation entre la différence de pression $P_B - P_A$ et la vitesse V_0 de l'avion. En déduire V_0 en fonction de h, ρ, g et ρ_l.

II. Tuyau conique au bout d'un réservoir

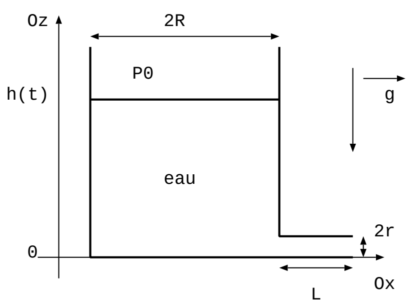
A la base d'une paroi retenant un liquide de masse volumique ρ et de viscosité négligeable, est percé un petit trou de surface S dans lequel est emmanché un tuyau conique de faible longueur dont la sortie possède une section s. On pose $s = \alpha S$ avec α coefficient sans dimension compris entre 0 et 1. La pression atmosphérique vaut P_0.



Calculer la pression à l'entrée du tuyau au point A, en fonction des grandeurs P_0, α, ρ, g et h. Commenter les deux cas limites : $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

III. Vidange d'un réservoir

On s'intéresse au dispositif de Torricelli (à l'origine mis en place pour les lances à incendies des pompiers et les fontaines de sa ville) : un cylindre de rayon R sert de réserve d'eau et est rempli sur une hauteur h. En bas de ce cylindre, un tube de longueur L et de rayon $r << R$ conduit jusqu'à une ouverture libre de laquelle l'eau s'éjecte. On néglige la viscosité de l'eau.



1. Dans cette première question, on s'intéresse au régime permanent de l'écoulement. Montrer que la vitesse d'éjection des particules de fluide à l'extrémité du petit tube est $v = \sqrt{2gh}$. Commenter cette valeur.

2. Dans cette question, on souhaite étudier le régime quasi permanent afin de calculer le temps de vidange du réservoir. On suppose l'écoulement quasi unidimensionnel d'une part dans le réservoir $\overrightarrow{V} = -V(z,t)\overrightarrow{e_z}$ et quasi unidimensionnel d'autre part dans le tube $\overrightarrow{v} = v(x,t)\overrightarrow{e_x}$.

2.a. Montrer que la vitesse dans le réservoir V ne dépend pas de z.

2.b. De même, montrer que la vitesse v de l'eau dans le tube ne dépend pas de x.

2.c. Trouver le lien entre V, v, r et R.

2.d. Etablir le lien entre V et $\dot{h}$ puis entre v et $\dot{h}$.

2.e. En supposant que la vitesse établie question 1 reste vraie, en déduire l'équation différentielle dont $h(t)$ est solution.

2.f. Résoudre cette équation et en déduire le temps de vidange t_0 du réservoir rempli initialement d'une hauteur d'eau h_0.

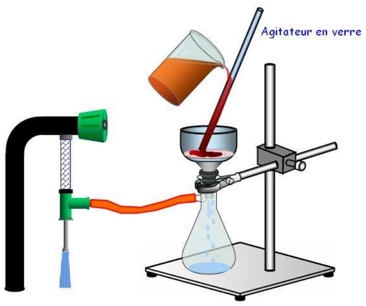
IV. La baignoire

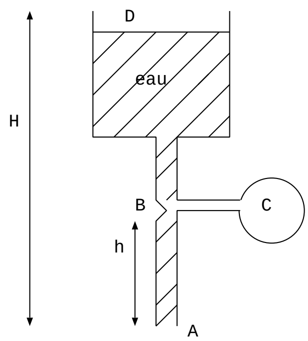
Une baignoire se remplit en 8 minutes, robinet ouvert et bonde fermée, et se vide en 12 minutes, robinet fermé et bonde ouverte.

La baignoire déborde-t-elle si on ouvre à la fois le robinet et la bonde? Combien de temps faut-il pour vider une baignoire?

V. Trompe à eau

Une trompe à eau est un dispositif servant à faire le vide. En chimie par exemple, elle est utilisée dans les montages de filtration. Elle est en général constituée d'un réservoir ouvert de grande section dont le niveau en D est maintenu constant. L'eau s'écoule par un tube de section constante s sauf en un point B où il présente un rétrécissement et où la section est $s_1 = s/4$.En B, le tube est mis en communication avec un récipient C initialement rempli d'air à la pression atmosphérique. En fonctionnement l'eau ne pénètre pas dans C. On étudie maintenant ce dispositif lorsque le régime permanent est établi. On note P_0 la pression atmosphérique et on prendra $P_0 = 10^5\ Pa$.



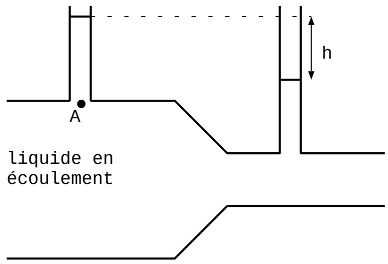


Calculer les vitesses V_A et V_B de l'eau aux points A et B. On donne $H = 50\ cm$, $h = 10\ cm$, $s = 1\ cm^2$ et $g = 10\ m/s^2$. Evaluer la pression de l'air dans C.

Réponses : $V_A = 3,2\ m/s$, $V_B = 12,8\ m/s$ *et* $P_C = 2,6.10^4\ Pa$

VI. **Tube de Venturi utilisé en débitmètre**

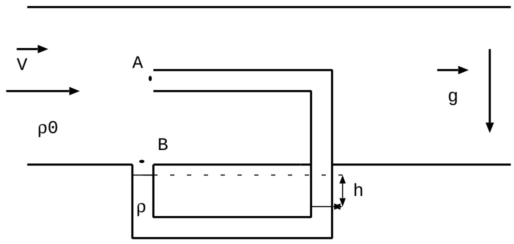
Soit liquide parfait de masse volumique ρ_l en écoulement dans une conduite de section variable (S en amont et s en aval) percée de deux cheminées latérales. Expliquer la différence de niveaux d'eau dans les deux cheminées. Exprimer le débit volumique en fonction de g, h, S et s en utilisant la ligne de courant passant par A.



Le tube de Venturi est utilisé en aéronautique pour mesurer la vitesse relative en vol. C'est un tuyau qui présente un rétrécissement. La mesure de la différence de pression dans les régions de sections différentes permet d'accéder au débit du fluide. L'air est supposé en écoulement incompressible. Expliquer pourquoi ce dispositif n'est utilisé que sur des petits appareils type cessna?

VII. **Tube de Pitot à prise frontale**

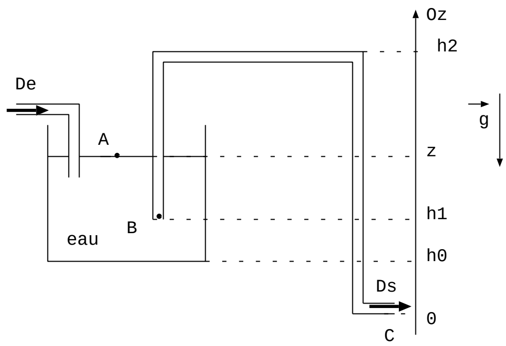
Une sonde cylindrique horizontale est parcourue par de l'air de masse volumique ρ_0 et de vitesse $\overrightarrow{V}$. Une dérivation avec une prise frontale et une prise latérale contient du mercure de masse volumique ρ. Montrer par un calcul approché, en utilisant les lignes de courant passant par A et B, que V s'exprimer en fonction de $\rho g h$ et ρ_0.



VIII. **Siphon**

Un bassin rectangulaire est alimenté en permanence par de l'eau (fluide parfait, incompressible de masse volumique ρ) avec un débit volumique constant D_e. La surface totale du bassin est $S = 20\ m^2$. un siphon BC de diamètre $d = 10\ cm$ (section s) en assure la vidange. Le haut du siphon est à la côte $h_2 = 3\ m$, la surface du bassin est à la côte z etle fond du bassin est à la côte $h_0 = 1\ m$. La pression atmosphérique est $P_0 = 10^5\ Pa$.

Le siphon s'amorce lorsque $z = h_2 = 3\ m$: l'écoulement se produit alors avec un débit volumique noté D_s. Le siphon se désamorce lorsque $z = h_1 = 2\ m$. De l'air pénètre alors dans le siphon.



On suppose le siphon initialement amorcé et $z = h_2$.

1. Calculer le débit initial D_s en C pour $z = h_2$. Discuter qualitativement de l'évolution du système selon la valeur de D_e.

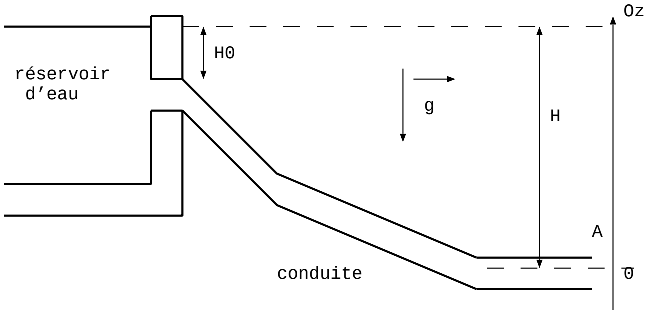
2. On prend $D_e = 30\ L/s$ avec $z = h_2$ initialement. Déterminer z_m pour laquelle les deux débits D_e et D_s sont égaux. Conclure sur l'évolution de la surface libre du bassin. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par z pendant que le siphon fonctionne.

Réponse : $z_m = 0,73\ m$

IX. **Conduite forcée pour une installation hydroélectrique**

Une conduite amène l'eau (fluide parfait incompressible de masse volumique ρ) d'un barrage vers une turbine. La conduite cylindrique, de diamètre constant $D = 30\ cm$, se termine horizontalement, son axe étant situé à une distance $H = 160\ m$ au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage de grande capacité (soit de niveau quasi constant). Le départ de la conduite se fait à une hauteur $H_0 = 20\ m$ au-dessous de la surface de l'eau dans le barrage. On néglige tout frottement.

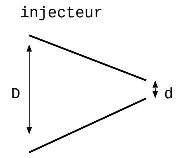
AN : $P_0 = 10^5\ Pa$, $\rho = 10^3\ kg/m^3$ et $g = 10\ m.s^{-2}$.



1. Calculer la vitesse V en A à la sortie de la conduite. AN.

2. Que peut-on dire du champ des vitesses dans la conduite? En déduire la loi de pression $P(z)$ dans la conduite. Montrer que l'on a un phénomène de cavitation (ébullition de l'eau sous très faible pression) dans une région de la conduite à déterminer (on admet que la cavitation apparaît quand la pression devient voisine de zéro). AN.

On visse sur l'extrémité A un injecteur de diamètre d'entrée D et de diamètre de sortie $d < D$.



3. La vitesse d'éjection est-elle modifiée? Et la vitesse dans la conduite? Etablir le loi $P'(z)$ donnant la pression dans la conduite en fonction de z. Montrer que le phénomène de cavitation disparaît pour $d < d_0$. AN : calculer d_0.

X. **Correction : siphon**

1. On applique le théorème de Bernouilli (hypothèses : écoulement stationnaire, parfait et incompressible dans le seul champ de pesanteur constant) sur une ligne de courant partant de la surface de l'eau dans le bassin en A jusqu'en C à la sortie du siphon :

$P_0 + \rho g h_2 + \dfrac{\rho V_A^2}{2} = P_0 + \dfrac{\rho V_C^2}{2}$ avec $V_A << V_C$ car la section du bassin est grande devant la section du tube soit $V_C = \sqrt{2gh_2}$ et $D_s = \dfrac{\pi d^2}{4} V_C = \dfrac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh_2} = 0,24\ m^3/s = 240\ L/s$.

Pour $D_e > D_s$, le niveau d'eau dans le bassin monte. le débit en C augmente et il existe un instant pour lequel les débits entrant et sortant se compensent, le régime permanent est alors atteint et le niveau d'eau dans le bassin reste le même.

Pour $D_e < D_s$, le niveau d'eau dans le bassin diminue.

Pour $D_e = D_s$, le niveau d'eau dans le bassin est constant.

2. Pour $D_e < D_s$, le niveau d'eau dans le bassin diminue, et le débit de sortie D_s diminue également. On aura $D_e = D_s$ pour $D_e = \dfrac{\pi d^2}{4} V_C = \dfrac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gz}$ on en déduit $z = \dfrac{D_e^2}{2g(\frac{\pi d^2}{4})^2} = 0,73\ m < h_0$: donc le débit d'entrée est toujours plus faible que le débit de sortie et donc le bassin se vide jusqu'à ce que le siphon se désamorce et le bassin se remplit à nouveau sous l'action du débit entrant.

La vitesse en A est très faible mais elle peut s'exprimer en toute rigueur en fonction de D_e et D_s par:

$D_e + V_A S = D_s$ avec $V_A > 0$ lorsque le bassin se vide et $V_A = -\dot{z}$ soit $\dot{z} = \dfrac{D_e - D_s}{S} = \dfrac{D_e}{S} - \dfrac{\pi d^2}{4S}\sqrt{2gz}$.

XI. **Correction : Conduite forcée pour une installation hydroélectrique**

1. On applique le théorème de Bernouilli (hypothèses : écoulement stationnaire, parfait et incompressible dans le seul champ de pesanteur constant) sur une ligne de courant partant de la surface de l'eau dans le barrage (en un tel point la vitesse d'écoulement est négligeable) jusqu'en A :

$P_0 + \rho g H = P_0 + \dfrac{\rho V_A^2}{2}$ donc $V_A = \sqrt{2gH} = 56,6\ m = 204\ km/h$.

2. L'écoulement est incompressible donc le débit volumique est conservé soit $D_v = V.S$ est constant. Dans toute la conduite, la section est constante donc la vitesse est égale à la vitesse d'éjection V_A.

On applique le théorème de Bernouilli sur une ligne de courant reliant le point M d'altitude z dans la conduite et le point A:

$P(z) + \rho g z + \dfrac{\rho V_A^2}{2} = P_0 + \dfrac{\rho V_A^2}{2}$ soit $P(z) = P_0 - \rho g z$. La pression diminue lorsque l'altitude augmente. Ici c'est la même loi qu'en hydrostatique. Le phénomène de cavitation se produit pour z telle que $P(z) = 0 = P_0 - \rho g z$ soit $z = \dfrac{P_0}{\rho g} = 10\ m$.

3. La vitesse d'éjection n'est pas modifiée car la pression et l'altitude en ce point n'ont pas changé.

Dans la conduite, la conservation du débit volumique lié à un écoulement incompressible impose $V(z).\dfrac{\pi D^2}{4} = V_A.\dfrac{\pi d^2}{4}$, soit $V(z) = \dfrac{d^2}{D^2} V_A$. La vitesse est la même en tout point de la conduite mais cette vitesse est plus faible que a vitesse d'éjection en A. La vitesse est plus faible impose que la pression y est plus grande donc on va pouvoir éviter le phénomène de cavitation.

On applique le théorème de Bernouilli sur une ligne de courant reliant le point M d'altitude z dans la conduite et le point A:

$P'(z) + \rho g z + \dfrac{\rho V(z)^2}{2} = P_0 + \dfrac{\rho V_A^2}{2}$ soit $P'(z) = P_0 - \rho g z + \dfrac{\rho V_A^2}{2}(1 - \dfrac{d^4}{D^4}) = P_0 - \rho g z + \rho g H(1 - \dfrac{d^4}{D^4})$.

C'est pour $z = H - H_0$ que la pression est la plus faible dans la conduite, donc si en haut de la conduite la pression n'est pas nulle, on évite la cavitation partout dans la conduite. On doit donc avoir $P_0 - \rho g(H - H_0) + \rho g H(1 - \dfrac{d^4}{D^4}) > 0$ ou encore $\dfrac{d^4}{D^4} < \dfrac{P_0 + \rho g H_0}{\rho g H}$ ou encore $d < D(\dfrac{P_0 + \rho g H_0}{\rho g H})^{1/4} = d_0 = 19,7\ cm$.