TD 1 ondes mécaniques

I. **Pour appliquer le cours**

1. La fonction $u(y,t)$ vérifie l'équation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\mu}{F}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$.

1.a. Quel nom porte cette équation?

1.b. Cette onde est-elle transverse ou longitudinale?

1.c. Ecrire une solution sous la forme d'onde plane progressive se propageant selon $-Oy$ puis selon $+Oy$.

1.d. Ecrire une solution sous la forme d'onde stationnaire avec pour conditions aux limites $z(0,t) = z(L,t) = 0$. Exprimer les longueurs d'onde possibles en fonction de L.

2. Une onde de la forme $z(x,t) = z_0 \sin(4x - 8t)$ se propage sur une corde. Caractériser cette onde. Donner sa pulsation, son vecteur d'onde et sa vitesse de propagation. Quelle équation vérifie $z(x,t)$?

3. Soit l'onde de la forme $z(x,t) = z_0 \sin(4t)\cos(\dfrac{3\pi x}{l})$ sur une corde de longueur l comprise entre $x = 0$ et $x = l$.

3.a. Caractériser cette onde. Donner sa période T, sa longueur d'onde λ, et la vitesse C des ondes sur cette corde. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $z(x,t)$.

3.b. Préciser la position des noeuds et la position des ventres sur la corde.

3.c. Représenter la corde aux instants $t = 0$ et $t = T/4$.

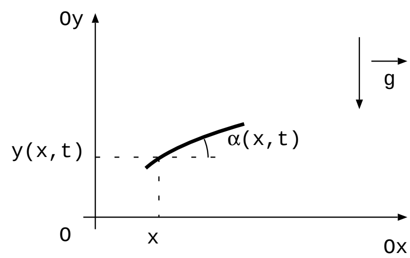
4. La corde de Melde est fixe en $x = L$ et comprend un excitateur sinusoidal en $x = 0$. Déterminer en vous appuyant sur un dessin les fréquences pour lesquelles la corde présente une résonance. Représenter la corde pour le mode propre de rang 5, donner dans ce cas la relation entre L et λ.

5. $u(z,t)$ vérifie une équation de d'Alembert. On choisit une solution de la forme $u(z,t) = \sin(\omega t) f(z)$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $f(z)$ et la résoudre.

6. Soit l'équation de propagation sur une corde tendue sous la force T_0 et de raideur caractérisée par γ : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \dfrac{\gamma}{T_0}\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$ où γ et T_0 sont des constantes positives. Déterminder l'unité de γ. On cherche une solution sous la forme $y(x,t) = y_0 e^{j(\omega t - kx)}$. Ecrire la relation de dispersion et en déduire k. Commenter les résultats.

II. **Effet du poids**

On considère une corde horizontale de longueur L, de masse linéique μ uniforme , et de tension T_0. On note $y(x,t)$ la vibration transversale et $\alpha(x,t)$ l'angle que fait la tangente à la corde par rapport à l'horizontale au point M d'abscisse x à l'instant t. On néglige la raideur de la corde et on tient compte de son poids.

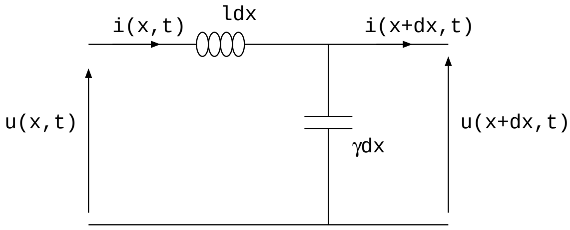


Par application de la RFD à l'élément de corde compris entre les abscisses x et $x + dx$, déterminer l'équation de propagation.

Réponse : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = +\dfrac{\mu g}{T_0}$

III. **Propagation dans un câble coaxial**

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l.dx$ et d'une capacité $\gamma.dx$.



1. Déduire de l'application d'une loi des noeuds et d'une loi des mailles que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ vérifient les équations différentielles $\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -l \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$.

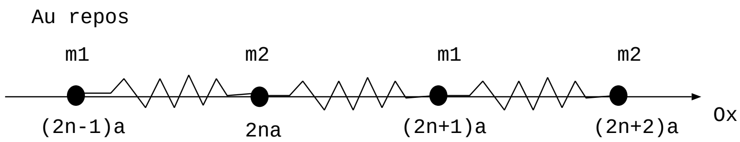
2. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions d'une équation de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?

3. Une OPPH se propage selon $+Ox$. Donner l'expression de $u(x,t)$ et écrire la relation de dispersion.

Réponses : $c = \frac{1}{\sqrt{l\gamma}}$, *relation de dispersion* $k = \frac{\omega}{c}$

IV. **Réseau cristallin à 2 types d'atomes**

On considère une chaîne alternée avec des atomes de masse m_2 aux positions paires $2n$ et des atomes de masse m_1 aux positions impaires $2n+1$. A l'équilibre, ils sont séparés par une distance a et l'atome p se trouve à l'abscisse $x_p^0 = pa$. Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie suivant l'axe Ox la position de l'atome p d'une quantité $U_p(t) << a$, celui ci est soumis à des interactions modélisées par des forces de rappel de raideur K limitées entre plus proches voisins.



1. Appliquer la RFD à l'atome $2n$ puis à l'atome $2n+1$.

2. On étudie la propagation d'ondes sous la forme $\underline{U}_{2n}(t) = U_2 e^{j(kx^0_{2n} - \omega t)}$ et $\underline{U}_{2n+1}(t) = U_1 e^{j(kx^0_{2n+1} - \omega t)}$ en notation complexe.

2.a. De quel type d'onde s'agit-il?

2.b. Ecrire $\underline{U}_{2n-1}(t)$ et $\underline{U}_{2n+2}(t)$.

2.c. Etablir le système de deux équations vérifiées par U_1 et U_2 et en déduire la relation de dispersion (on ne demande pas de la résoudre).

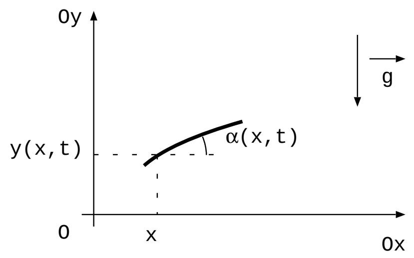
3. En résolvant ces équations pour $ka -> 0$, on montre que pour $\omega = \sqrt{\frac{2K(m_1+m_2)}{m_1.m_2}}$, on a $\frac{U_2}{U_1} = -\frac{m_1}{m_2}$. Commenter le mouvement des atomes dans ce cas.

Réponse: $U_2(2 - \frac{m_2\omega^2}{K}) = 2U_1\cos(ka)$ *et* $U_1(2 - \frac{m_1\omega^2}{K}) = 2U_2\cos(ka)$, *soit* $\omega^4 - 2\frac{K(m_1+m_2)}{m_1.m_2}\omega^2 + 4(\sin(ka))^2 = 0$

V. **Notions d'impédances en mécanique ondulatoire**

La notion d'impédance est définie par analogie avec l'électrocinétique. Dans le cours sur les ondes, elle est utile lorsqu'une onde se progage dans un milieu fini, cette onde peut être réfléchie. Lorsque l'impédance en bout de ligne est égale à l'impédance caractéristique du milieu de propagation, il n'y a pas d'onde réfléchie : on parle d'adaptation d'impédance. Au contraire, lorsque l'impédance en bout de ligne est différente de l'impédance caractéristique du milieu de propagation, l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie.

1. L'impédance de la corde vibrante en x à l'instant t est définie par $Z(x,t) = \dfrac{-T_y(x,t)}{V_y(x,t)}$ où $T_y(x,t)$ est la projection sur l'axe Oy de la tension de la corde et $V_y(x,t)$ la vitesse selon Oy d'un point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. On note μ la masse volumique de la corde et T_0 la force de tension exercée sur la corde.



1.a. Exprimer $T_y(x,t)$ en fonction de T_0 et d'une dérivée partielle de $y(x,t)$.

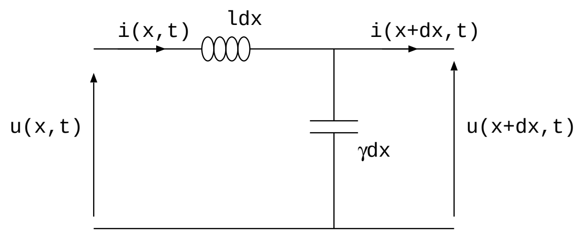
1.b. Exprimer $V_y(x,t)$ en fonction d'une dérivée partielle de $y(x,t)$.

1.c. Exprimer $y(x,t)$ lorsqu'une onde progressive se propage sur la corde selon $+Ox$. Exprimer $T_y(x,t)$ et $V_y(x,t)$ et en déduire $Z(x,t)$. Commenter l'expression trouvée.

1.d. Que devient $Z(x,t)$ pour une onde progressive se propageant selon $-Ox$?

1.e. En $x=0$, un dispositif fait vibrer la corde en $x=0$ de façon sinudoidale. En $x=L$, la corde est fixe. Que vaut $Z(x=L,t)$? En $x=L$, on accroche à la corde un anneau de masse négligeable qui coulisse sans frottement sur une tige verticale. Représenter les forces qui agissent que l'anneau et calculer $Z(x=L,t)$.

2. L'impédance d'un câble coaxial est définie par $Z(x,t) = \dfrac{u(x,t)}{i(x,t)}$.



2.a. Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -l\dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t)$.

2.b. Exprimer $u(x,t)$ lorsqu'une onde progressive se propage sur le câble selon $+Ox$. En déduire $i(x,t)$ puis $Z(x,t)$. Commenter l'expression trouvée.

2.c. Que devient $Z(x,t)$ pour une onde progressive se propageant selon $-Ox$?

2.d. Le câble coaxial est alimenté par un GBF et présente en $x=L$ un fil de court-circuit, que vaut $Z(x=L,t)$? Y a-t-il une onde réfléchie? Le câble coaxial est alimenté par un GBF et présente en $x=L$ un interrupteur ouvert, que vaut $Z(x=L,t)$? Y a-t-il une onde réfléchie? Quel composant mettre en bout de cable en $x=L$ pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie.

Réponses : Sur la corde : $Z = +\dfrac{T_0}{c}$ *pour une* OPP^+ *et* $Z = -\dfrac{T_0}{c}$ *pour une* OPP^-*, sur le câble coaxial :* $Z = +\sqrt{\dfrac{l}{\gamma}}$ *pour une* OPP^+ *et* $Z = -\sqrt{\dfrac{l}{\gamma}}$ *pour une* OPP^-

VI. **Utilisation de l'impédance d'un câble coaxial**

On rappelle que l'impédance d'un câble coaxial est $Z = \frac{u}{i} = +\sqrt{\frac{l}{\gamma}}$ pour une OPP^+ et $Z = \frac{u}{i} = -\sqrt{\frac{l}{\gamma}}$ pour une OPP^- où γ est la capacité linéique du câble et l l'inductance linéique du câble. La célérité des ondes sur le câble est $c = \frac{1}{\sqrt{l\gamma}}$.

1. Une onde de la forme $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$ se propage sur le câble.

1.a. Caractériser cette onde. Exprimer $i(x,t)$ associé.

1.b. L'équation de propagation de $u(x,t)$ est une équation de d'Alembert. Ecrire cette équation et en déduire la relation de dispersion. Le milieu est-il dispersif? Commenter le résultat.

2. Le câble est semi-infini, il se termine en $x = 0$ par un interrupteur ouvert. Une onde incidente de la forme $u_i(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$ est émise en $x- > -\infty$ et donne naissance à une onde réfléchie $u_r(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$. Exprimer $i_i(x,t)$ et $i_r(x,t)$ et déduire de la condition aux limites en $x = 0$, la valeur de A. En déduire l'onde résultante $u(x,t)$ et $i(x,t)$. Commenter et représenter ces ondes pour $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$ et $t = 3T/4$ où T désigne la période.

3. Même question lorsque le câble se termine en $x = 0$ par un fil.

4. Même question lorsque le câble se termine en $x = 0$ par une résistance de valeur $R_c = \sqrt{\frac{l}{\gamma}}$.

Réponses : lorsqu'il y a un interrupteur ouvert en $x = 0$ *:* $A = E$, $u(x,t) = 2E\cos(\omega t)\cos(kx)$ *et* $i(x,t) = 2E\sqrt{\frac{\gamma}{l}}\sin(\omega t)\sin(kx)$, *lorsqu'il y a un fil en* $x = 0$ *:* $A = -E$, $u(x,t) = 2E\sin(\omega t)\sin(kx)$ *et* $i(x,t) = 2E\sqrt{\frac{\gamma}{l}}\cos(\omega t)\cos(kx)$, *pour* R_c *:* $A = 0$

VII. **Corde vibrante dans un fluide visqueux**

On considère une corde horizontale de longueur L, de masse linéique μ uniforme, et de tension T_0. On note $y(x,t)$ la vibration transversale et $\alpha(x,t)$ l'angle que fait la tangente à la corde par rapport à l'horizontale au point M d'abscisse x à l'instant t. Cette corde baigne dans un fluide qui exerce sur la portion de corde entre x et $x + dx$ à l'instant t, la force $-hdx\overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V}$ est la vitesse de l'élément de corde à l'abscisse x et h une constante positive. On néglige le poids et la raideur de la corde.

1. Justifier la forme de la force exercée par le fluide et préciser l'unité de h.

2. Montrer que l'équation de propagation s'écrit:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{h}{T_0}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

3. On cherche les solutions de la forme $y(x,t) = Y_0 cos(\omega t - kx)$.

3.a. Ecrire le complexe $\underline{y}$ associée à $y(x,t)$ (même méthode qu'en régime sinusoidal forcé en électricité).

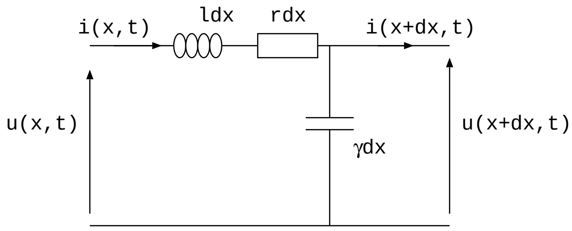
3.b. Exprimer $\frac{\partial^2 \underline{y}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \underline{y}}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial \underline{y}}{\partial t}$ en fonction de $\underline{y}$, j, ω et k.

3.c. En déduire que $k^2 = \frac{\mu\omega^2}{T_0} + j\frac{\omega h}{T_0}$ (où j est l'imaginaire pur tel que $j^2 = -1$).

Réponses : 1- $[h] = kg.m^{-1}.s^{-1}$

VIII. **Prise en compte d'effets dissipatifs sur la propagation dans un câble coaxial**

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l.dx$, d'une résistance $r.dx$ et d'une capacité $\gamma.dx$.



1. Déduire de l'application d'une loi des noeuds et d'une loi des mailles les équations différentielles couplées vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$.

2. Montrer que $i(x,t)$ vérifie l'équation de propagation $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} - l\gamma\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \gamma R\dfrac{\partial i}{\partial t} = 0$

3. On choisit une solution de la forme $\underline{i}(x,t) = i_0 e^{j(\underline{k}x-\omega t)}$. Ecrire la relation de dispersion et commenter.

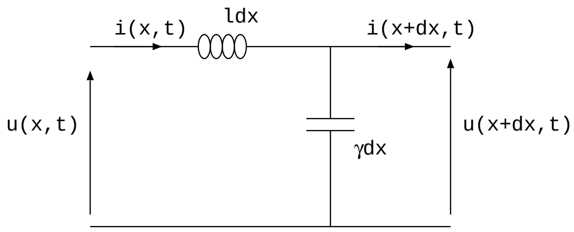
4. Que trouve-t-on dans le cas limite où $r- > 0$?

5. Pour quelles fréquences $\underline{k}^2$ est-il un imaginaire pur? Exprimer $\underline{k}$ dans ce cas et en déduire l'expression de $i(x,t)$. Commenter.

Réponses : $-\dfrac{\partial u}{\partial x} = ri + l\dfrac{\partial i}{\partial t}$ *et* $\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t}$, *pour* $\underline{\omega} < \dfrac{r}{l}$, *on a* $\underline{k} = \sqrt{\dfrac{\gamma r\omega}{2}}(1-j)$

IX. **Onde stationnaire sur un câble coaxial**

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l.dx$ et d'une capacité $\gamma.dx$.



1. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions d'une équation de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?

2. Le câble est alimenté en $x = 0$ par un générateur qui délivre la tension $u(0,t) = E\cos(\omega t)$ et se termine en $x = L$ par un fil de court-circuit. On propose une solution de la forme $u(x,t) = U_0\cos(\omega t)\sin(kx+\phi)$ où U_0 et ϕ sont des constantes que l'on peut déduire des conditions aux limites.

2.a. De quel type d'onde s'agit-il? Justifier physiquement ce choix.

2.b. Représenter l'onde de tension dans le mode fondamental et pour les deux premiers harmoniques. En déduire la relation entre λ et L à résonance. En déduire les fréquences propres.

2.c. Ecrire les conditions aux limites vérifiées par $u(x,t)$. On montre que $u(x,t)$ s'écrit $u(x,t) = \dfrac{E}{\sin(kL)}\sin(k(L-x))\cos(\omega t)$. Commenter cette expression et retrouver les résultats de la question précédente. Exprimer $i(x,t)$ et comparer les ondes de tension et de courant.

Les élèves qui le souhaitent peuvent établir l'expression de $u(x,t)$ donnée.

2.d. A quel système vous fait penser ce dispositif?

3. Le câble est alimenté en $x = 0$ par un générateur qui délivre la tension $u(0,t) = E\cos(\omega t)$ et se termine en $x = L$ par un interrupteur ouvert. Représenter les ondes de tension et de courant pour le mode fondamental et les deux premiers harmoniques. En déduire la relation entre λ et L à résonance. En déduire les fréquences propres.

Réponses : célérité des ondes $c = \dfrac{1}{\sqrt{l\gamma}}$, *solution en onde stationnaire,* $L = \dfrac{p\lambda_p}{2}$, $f_p = \dfrac{pc}{2L}$

Compétences à acquérir en physique des ondes

Etablir l'équation d'onde en utilisant un système infinitésimal (exercices II, III, IV, VII, VIII)

Reconnaitre une équation de d'Alembert (exercices I1, II, III, IV)

Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive par la forme de leur représentation réelle (exercices I1, I2, I3, I4, I5, IX, VI)

En négligeant l'amortissement, associer mode propre et résonance en régime forcé (exercices I4, IX)

Etablir une relation de dispersion pour les OPPH. Associer les parties réelle et imaginaire de k aux phénomènes de dispersion et d'absorption (exercices I6, IV, VII, VIII)

Reconnaitre une onde évanescente (exercice VIII)

Utiliser la notion d'impédances acoustiques (par analogie, on introduit la notion d'impédances sur la corde et la ligne bifilaire, on apprend à l'utiliser : exercices V et VI)