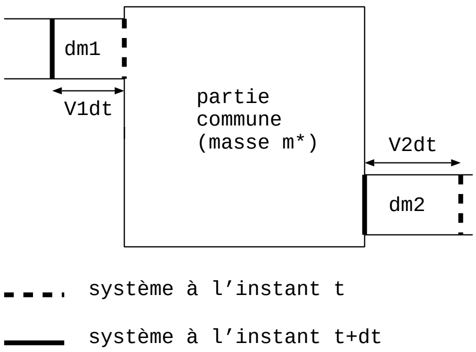
Correction CCP PSI 2013 : éolienne



28-b- Les systèmes à t et $t + dt$ ont une partie commune dont on note m^* la masse.

La masse du système à l'instant t est $m^*(t) + dm_1$.

La masse du système à l'instant $t + dt$ est $m^*(t + dt) + dm_2$.

La conservation de la masse conduit à $m^*(t) + dm_1 = m^*(t + dt) + dm_2$ soit $dm_1 = dm_2$ car en régime permanent $m^*(t + dt) = m^*(t)$.

D'où encore $\dfrac{dm_1}{dt} = \dfrac{dm_2}{dt} = D_m$: le débit massique est conservé, il est le meme à l'entrée et à la sortie du système.

29- En amont le fluide subit la force de pression $+P_1S_1\overrightarrow{e_x}$ ($\overrightarrow{e_x}$ choisi dans le sens de l'écoulement), c'est une force motrice. La puissance de cette force s'écrit $P_1 = \dfrac{\delta W_1}{dt} = +P_1S_1\overrightarrow{e_x}.V_1\overrightarrow{e_x} = P_1S_1V_1 = P_1D_v$ donc $\delta W_1 = P_1S_1V_1dt = P_1v_1dm_1$ car V_1dtS_1 représente le volume occupé par la masse dm_1, ce volume est aussi égal au produit du volume massique v_1 par la masse dm_1.

On procède de meme en aval du système où la force de pression est résistance, elle s'écrit : $-P_2S_2\overrightarrow{e_x}$ d'où $\delta W_2 = -P_2S_2V_2dt = P_2v_2dm_2$.

Autre méthode: le travail d'une force de pression s'écrit $W = -\displaystyle\int P_{ext}dV$. Lorsque la pression extérieure est uniforme on a $W = -P_{ext}\Delta V$.

Soit ici, en amont du système $P_{ext} = P_1$ et la variation de volume est $(0-v_1.dm_1)$ soit $\delta W_1 = -P_1(-v_1.dm_1) = +P_1.v_1.dm_1 > 0$: le fluide subit une compression.

De meme en aval du système, $P_{ext} = P_2$ et la variation de volume est $(v_2.dm_2)$ soit $\delta W_2 = -P_2(v_2.dm_2) = -P_2.v_2.dm_2 < 0$: le fluide subit une détente.

30- La conservation de l'énergie du système fermé et mobile s'écrit:

$dE_c + dE_p + dU = \delta W + \delta Q$

ici:

$dE_c = (E_c^*(t + dt) + dm_2e_{c2}) - (E_c^*(t) + dm_1e_{c1}) = D_mdt(e_{c2} - e_{c1})$

De la meme façon : $dE_p = D_mdt(e_{p2} - e_{p1})$, puis $dU = D_mdt(u_2 - u_1)$

De plus $\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 + P_udt$: dans le travail, il y a le travail des forces de pression et le travail utile.

De plus $\delta Q = P_{th}dt$

Ainsi on a après avoir simplifié par dt : $D_m(u_2-u_1+(e_{c2}-e_{c1})+(e_{p2}-e_{p1})) = P_u+P_{th}+D_m(P_1v_1-P_2v_2)$ ou encore $D_m(u_2+P_2v_2-u_1P_1v_1+(e_{c2}-e_{c1})+(e_{p2}-e_{p1})) = P_u+P_{th}$ d'où $D_m(h_2-h_1+(e_{c2}-e_{c1})+(e_{p2}-e_{p1})) = P_u + P_{th}$ car l'enthalpie massique vérifie $h = u + Pv$.

Par identification avec l'énoncé, la fonction x désigne l'enthalpie massique, elle s'exprime en J/kg.

31- La résultante des forces s'exprime en $kg.m.s^{-2}$ (ce sont des Newton).

La vitesse est en $m.s^{-1}$ donc l'unité de Y_m est le $kg.s^{-1}$: c'est le débit massique.

32- On écrit la conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible soit: $V_A S_A = VS = V_B S_B$.

33- On applique la relation de Bernouilli sur une ligne de courant allant de la surface S_A jusqu'à la surface Σ_1 avant l'hélice (les hypothèses du théorème sont vérifiées : écoulement parfait, incompressible, permanent et pas d'autres forces que le poids et les forces de pression), soit:

$P_0 + \rho\frac{V_A^2}{2} = P_1 + \rho\frac{V^2}{2}$ ici l'énoncé précise de négliger les effets de la pesanteur:

$P_1 = P_0 + \frac{\rho}{2}(V_A^2 - V^2)$.

On applique la relation de Bernouilli de même sur une ligne de courant allant d'un point sur la surface Σ_2 jusqu'à la surface S_B. Les hypothèses précédentes sont bien vérifiées.

$P_0 + \rho\frac{V_B^2}{2} = P_2 + \rho\frac{V^2}{2}$ ici l'énoncé précise de néglige les variations d'énergie potentielle soit:

$P_2 = P_0 + \frac{\rho}{2}(V_B^2 - V^2)$.

Rq : on ne peut pas appliquer Bernouilli entre Σ_1 et Σ_2 à cause des parties mobiles qui exercent une force dont Bernouilli ne tient pas compte.

34-a- La résultante des forces qui s'exercent sur l'air compris entre Σ_1 et Σ_2 comprend:

- la force des pâles sur l'air : $F\overrightarrow{e_x}$
- la force de pression en amont : $+P_1 S\overrightarrow{e_x}$ (force motrice)
- la force de pression en aval : $-P_2 S\overrightarrow{e_x}$ (force résistante)
- la force de pression de l'air extérieur sur les parois latérales du tube de courant est nulle car le tube de courant est cylindrique dans cette partie du système (les sections sont égales).
- le poids : négligé

34-b- La vitesse à l'entrée et à la sortie du système entre Σ_1 et Σ_2 est la même donc la loi de la quantité de mouvement conduit à écrire que la résultante des forces exercées sur le système est nulle.

34-c- On projette la résultante des forces sur Ox : $F + P_1 S - P_2 S = 0$ soit $F = (P_2 - P_1)S$.

34-d- Ou encore en utilisant les résultats de la question 33- : $F = \frac{\rho S}{2}(V_B^2 - V_A^2)$.

35- On applique la loi de la quantité de mouvement au système compris entre S_A et S_B : $D_m(\overrightarrow{V}_B - \overrightarrow{V}_A) = \overrightarrow{R}$.

La résultante des forces compte:

- le poids: négligé
- la résultante des forces de pression de l'air supposée nulle ici
- la force exercée par les pales sur l'air : $F\overrightarrow{e_x}$

On a donc en projection sur Ox : $D_m(V_B - V_A) = F$ avec $D_m = \rho SV$ soit $\rho SV(V_B - V_A) = F$.

36- On a deux expressions de F soit: $F = \rho SV(V_B - V_A) = \frac{\rho S}{2}(V_B^2 - V_A^2)$. Après simplification par ρS, on en déduit: $V(V_B - V_A) = \frac{1}{2}(V_B - V_A)(V_B + V_A)$ ou encore $2V = V_A + V_B$.

37- Le gaz parfait obéit à la loi de Joule : son enthalpie ne dépend que de la température. Il est précisé dans l'énoncé que la température en amont et en aval est égale à T_0, elle ne varie pas, donc la variation d'enthalpie est nulle.

Si la température est homogène, comme il est dit dans l'énoncé, les différentes couches d'air n'échangent pas de transfert thermique les unes avec les autres.

38- On applique la loi de conservation de l'énergie : $D_m(e_{c2} - e_{c1}) = P_u = -P_{eol}$: en effet l'énoncé définit la puissance de l'éolienne comme la puissance reçue par les pales de la part du fluide, donc la puissance utile, qui représente la puissance cédée par le fluide aux pales, est opposée à P_{eol}.

On a donc $\frac{\rho S V}{2}(V_B^2 - V_A^2) = -P_{eol}$ soit $P_{eol} = \frac{\rho S}{4}(V_A + V_B)(V_A^2 - V_B^2)$.

39- On remplace V_B par xV_A, on obtient l'expression de la puissance reçue par l'éolienne en fonction de x: $P_{eol} = \frac{\rho S V_A^3}{4}(1+x)(1-x^2)$.

On cherche la valeur de x pour laquelle cette puissance est maximale soit la valeur de x pou laquelle $\frac{dP_{eol}}{dx} = 0 = \frac{\rho S V_A^3}{4}((1-x^2)+(1+x)(-2x))$ soit $\frac{\rho S V_A^3}{4}((1-x)(1+x)+(1+x)(-2x)) = \frac{\rho S V_A^3}{4}(1+x)(-3x+1) = 0$: la solution est $x = \frac{1}{3}$.

La puissance maximale est donc : $P_{eol,max} = \frac{\rho S V_A^3}{4}\frac{4}{3}\frac{8}{9} = \frac{8\rho S V_A^3}{27}$.

40- $S = \pi\frac{D^2}{4}$ et $V_A = 40\ km/h = \frac{40.1000}{3600}\ m/s$ et $\rho = \frac{P_0 M}{RT_0} = 1,20\ kg/m^3$ donne $P_{eol,max} = 1,38\ MW$.

Pour l'équivalent d'une tranche nucléaire, il faut $\frac{1500}{1,38} = 1087$ éoliennes!!!